

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

S 47 (M 17)

Transformatie op een homogene verdeling

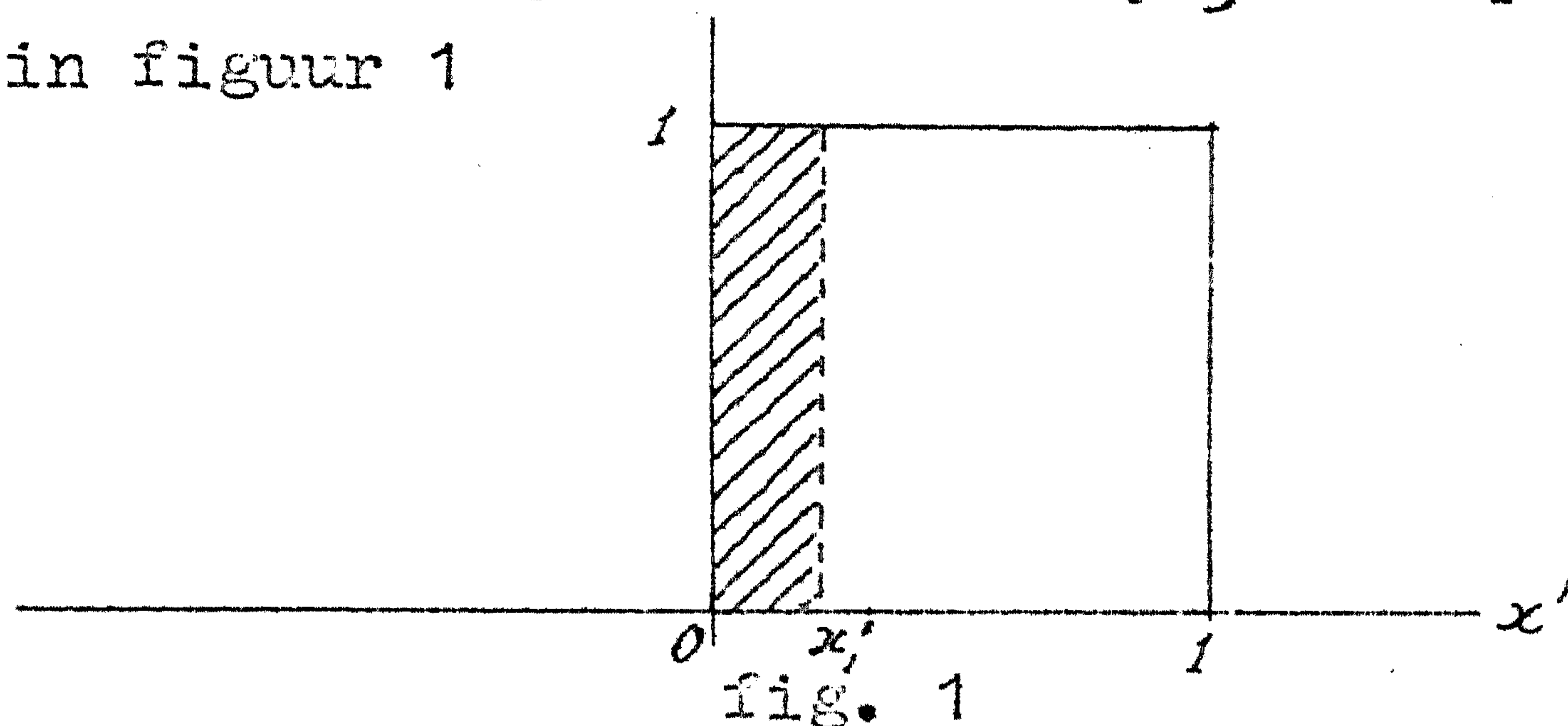


Transformatie op een homogene verdeling. ¹⁾

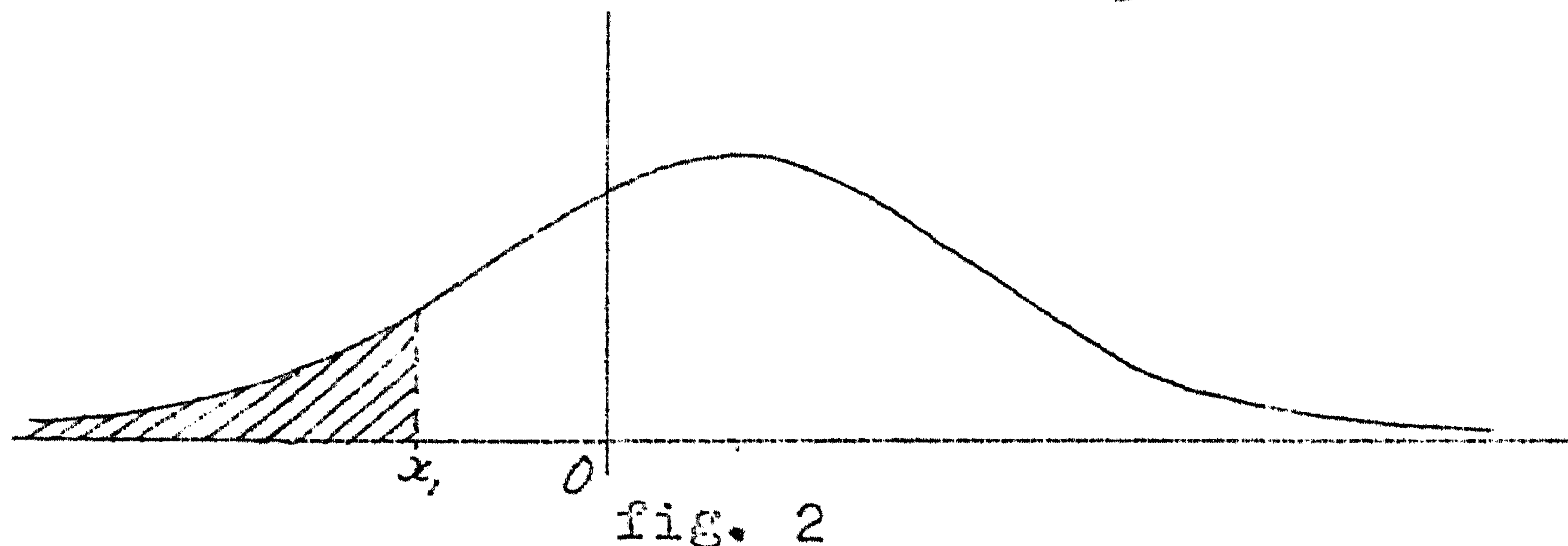
Ter toetsing van verschillende hypothesen kan men gebruik maken van een transformatie, waardoor een stochastische grootte x met gegeven waarschijnlijkheidsverdeling, overgaat in een homogeen verdeelde grootte x' . Dit is een grootte, waarvoor geldt:

$$(1) P[x' \leq x'] = \begin{cases} 0 & \text{voor } x' < 0 \\ x' & \text{voor } 0 \leq x' \leq 1 \\ 1 & \text{voor } x' > 1 \end{cases}$$

dus met verdelingsdichtheid $h(x')$ (frequentiekromme) als in figuur 1



Indien nu de verdelingsdichtheid $f(x)$ van x gegeven wordt door de kromme van figuur 2:



en we noemen de oppervlakte links van een waarde x , onder de kromme gelegen $F(x)$, dan bestaat deze transformatie op een homogene verdeling daaruit, dat x , vervangen wordt door dat punt x'_1 (zie fig. 1), waarvoor geldt

$$(2) \quad x'_1 = F(x_1)$$

zodat links van x'_1 dezelfde oppervlakte onder de kromme $h(x')$ ligt, als links van x , onder $f(x)$.

Men kan deze transformatie ook zeer duidelijk voorstellen door figuur 3, waarin F de verdelingsfunctie van x' en G die van x voorstelt.

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

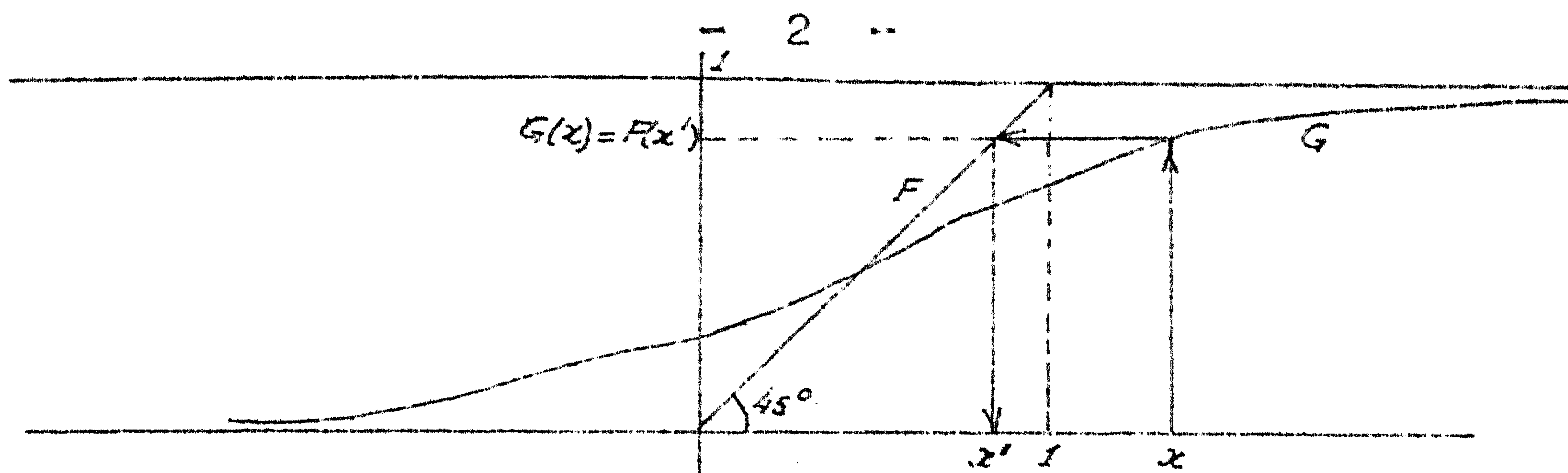


fig. 3

Voor een punt x is dus $G(x) = P[x \leq x]$. Zoeken wij nu het punt x' , waarvoor $x' = F(x') = G(x)$ is, dan is dit het bij x behorende getransformeerde punt. De transformatie is in de figuur door een drietal pijlen aangegeven.

Willen wij nu de hypothese H_0^p toetsen, dat een aantal waarden $x_1, \dots, x_n$ een steekproef vormen uit een gegeven verdeling met verdelingsdichtheid $f(x)$, dan transformeren wij deze steekproef door de transformatie:

$$(3) \quad x'_1 = F(x_1), \dots, x'_n = F(x_n)$$

en toetsen in plaats van H_0^p , de hypothese H_0^* , dat $x'_1, \dots, x'_n$ een steekproef uit een homogene verdeling vormen.

Deze toets verloopt als volgt:

Vorm het product der waarden $x'_1, \dots, x'_n$ en zoek hiervan de natuurlijke logaritme op. Het getal

$$(4) \quad Q = -2 \{ -\ln x'_1 + -\ln x'_2 + \dots + -\ln x'_n \} \quad \text{is}$$

de bij de steekproef behorende waarde van een statistische grootheid Q , die, zoals E.S.Pearson bewezen heeft, een χ^2 -verdeling bezit met $2n$ vrijheidsgraden.

Is dus $Q \geq Q_0$, waarin Q_0 een van n en de onbetrouwbaarheidsdrempel α afhankelijke grootheid is, die getabelleerd is, dan wordt H_0^p verworpen.

Literatuur:

E.S.Pearson, The Probability-Integral Transformation for testing goodness of fit and combining independent tests of significance. .

(Biometrika 30 (1938) p.134-148.